

Home Page

Title Page



Page 1 of 25

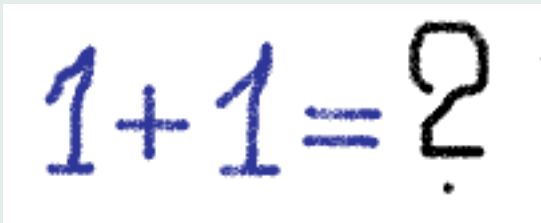
Go Back

Full Screen

Close

Quit

1. Uždaviniai



- Vidurkinimas eksponentiniu filtru
- Vaizdo vidurkinimas, gradientas, Laplasas
- Apibendrintų ekstremumų požymiai
- Nulio kirtimų požymiai
- Rainelių/veidų požymių palyginimas
- Laiko mastelio keitimas
- Bitiesinė interpoliacija
- Haro požymiai ir jų greitas apskaičiavimas
- Atraminių vektorių klasifikatorius
- Naiviojo Bajeso klasifikatorius
- Tiesinės prognozės metodas
- DET/ROC ir eiliškumo kreivės

1. Išveskite vidurkinant eksponentiniu filtru kraštinėms reikšmėms apskaičiuoti reikalingą formulę

$$\sum_{m=0}^{+\infty} m e^{-\frac{m}{\sigma}} = \frac{e^{-\frac{1}{\sigma}}}{(1 - e^{-\frac{1}{\sigma}})^2}, \sigma > 0. \tag{1}$$

Sprendimas Pagal geometrinės progresijos formulę bet kokiam $x > 0$ gauname

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-mx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Kadangi

$$\sum_{m=0}^{+\infty} m e^{-mx} = -\frac{df}{dx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2},$$

tai, įrašę paskutinėje formulėje $x = \frac{1}{\sigma}$, gauname (1) lygybę.

2. Įrodykite, kad Laplaso operatorius yra invariantinis koordinačių sistemos posūkiui, t.y. kiekvienam fiksuotam posūkio kampui α teisinga tapatybė

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{x'x'} + u_{y'y'}, \tag{2}$$

kur

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

Sprendimas Pagal sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklę gauname

$$u_x = u_{x'} \frac{dx'}{dx} + u_{y'} \frac{dy'}{dx} = u_{x'} \cos \alpha + u_{y'} \sin \alpha$$

ir

$$u_y = u_{x'} \frac{dx'}{dy} + u_{y'} \frac{dy'}{dy} = -u_{x'} \sin \alpha + u_{y'} \cos \alpha.$$

Todėl

$$u_{xx} = \cos \alpha (u_{x'x'} \cos \alpha + u_{y'x'} \sin \alpha) + \sin \alpha (u_{y'y'} \sin \alpha + u_{x'y'} \cos \alpha)$$

ir

$$u_{yy} = -\sin \alpha (-u_{x'x'} \sin \alpha + u_{x'y'} \cos \alpha) + \cos \alpha (-u_{y'x'} \sin \alpha + u_{y'y'} \cos \alpha).$$

Kadangi $u_{xy} = u_{yx}$ ir $u_{x'y'} = u_{y'x'}$, sudėję paskutines dvi lygybes gauname (2) lygybę.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

3. Raskite duotosios pilkumo lygmenų matricos pirmosios eilės apibendrintus maksimumo taškus. Aplinkos spindulys $R = 1.5$. Jei koks nors aplinkos taškas nepatenka į pilkumo lygmenų matricą arba tame taške reikšmė sutampa su centrinio taško reikšme, eilė padidinama 0.5 vienetu.

0	0	0	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	11	54	54	24	2	0	0	0	0
0	0	0	9	85	139	158	65	17	2	0	0	0
0	0	6	62	158	210	191	182	75	30	1	0	0
0	0	18	126	200	153	112	125	104	58	11	0	0
0	6	83	163	158	85	43	64	146	131	54	3	0
0	7	100	133	106	27	3	10	106	151	71	13	0
0	9	112	87	55	3	0	6	91	156	74	15	0
0	7	96	96	62	5	3	34	139	132	58	7	0
0	1	36	142	99	48	62	105	154	97	31	2	0
0	0	17	131	162	174	168	160	97	32	6	0	0
0	0	5	60	133	155	137	101	32	9	0	0	0
0	0	0	11	55	73	59	32	6	0	0	0	0
0	0	0	0	2	3	2	1	0	0	0	0	0

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 5 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Sprendimas

0	0	0	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	11	54	54	24	2	0	0	0	0
0	0	0	9	85	139	158	65	17	2	0	0	0
0	0	6	62	158	210	191	182	75	30	1	0	0
0	0	18	126	200	153	112	125	104	58	11	0	0
0	6	83	163	158	85	43	64	146	131	54	3	0
0	7	100	133	106	27	3	10	106	151	71	13	0
0	9	112	87	55	3	0	6	91	156	74	15	0
0	7	96	96	62	5	3	34	139	132	58	7	0
0	1	36	142	99	48	62	105	154	97	31	2	0
0	0	17	131	162	174	168	160	97	32	6	0	0
0	0	5	60	133	155	137	101	32	9	0	0	0
0	0	0	11	55	73	59	32	6	0	0	0	0
0	0	0	0	2	3	2	1	0	0	0	0	0

4. Raskite duotosios matricos nulio kirtimų pozicijas. Nulines matricos reikšmių pozicijas irgi laikykite nulio kirtimais. Jei reikalingas nulio kirtimui tikrinti taškas nepriklauso stačiakampiui, tokių sąlygų netikrinkite.

0	0	0	0	1	3	2	3	0	0	0	0	0
0	0	0	2	31	42	41	69	7	0	0	0	0
0	0	1	19	18	-104	-136	53	23	7	0	0	0
0	0	18	41	-52	-73	-86	-49	8	64	4	0	0
0	1	27	-140	-108	102	-93	49	-98	34	30	1	0
0	15	32	-143	-48	107	12	139	-163	-105	44	6	0
0	19	66	-106	81	75	8	27	75	-140	94	17	0
0	6	-66	-62	129	10	1	17	101	-143	104	24	0
0	19	56	-138	66	12	7	71	-103	-104	56	17	0
0	4	78	-178	81	96	62	76	-105	53	67	7	0
0	1	29	-131	-126	-112	-132	-112	51	63	20	0	0
0	0	18	37	-121	-122	-106	64	64	31	2	0	0
0	0	2	30	44	95	58	68	20	2	0	0	0
0	0	0	1	3	5	3	3	0	0	0	0	0

Sprendimas

0	0	0	0	1	3	2	3	0	0	0	0	0
0	0	0	2	31	42	41	69	7	0	0	0	0
0	0	1	19	18	-104	-136	53	23	7	0	0	0
0	0	18	41	-52	-73	-86	-49	8	64	4	0	0
0	1	27	-140	-108	102	-93	49	-98	34	30	1	0
0	15	32	-143	-48	107	12	139	-163	-105	44	6	0
0	19	66	-106	81	75	8	27	75	-140	94	17	0
0	6	-66	-62	129	10	1	17	101	-143	104	24	0
0	19	56	-138	66	12	7	71	-103	-104	56	17	0
0	4	78	-178	81	96	62	76	-105	53	67	7	0
0	1	29	-131	-126	-112	-132	-112	51	63	20	0	0
0	0	18	37	-121	-122	-106	64	64	31	2	0	0
0	0	2	30	44	95	58	68	20	2	0	0	0
0	0	0	1	3	5	3	3	0	0	0	0	0

5. Raskite duotųjų dviejų binarinių matricių panašumą.

Matrica A

1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0

Matrica B

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1

Sprendimas A ir B sutapusių stulpeliuose bitų skaičius:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Sim
0	4	2	1	2	4	1	3	2	2	1	2	0	24

Galutinis panašumas: $24/(12 * 4) = 0.5$.

6. Raskite duotųjų dviejų binarinių matricų panašumą. Ieškant panašumą, optimizuokite antrosios matricos poslinkį stumdydami ją x ašimi iki dviejų taškelių. Jai paslinktas taškelis viršija matricos rėžius, pratęskite duomenis periodiškai.

Matrica A

1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0

Matrica B

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1

Sprendimas A ir $(TB)_k$, kur T žymi poslinkį, $k = -2, -1, 0, 1, 2$, sutapusių stulpeliuose bitų skaičius:

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 10 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Sim
-2	3	3	2	1	2	1	2	1	1	4	4	2	26
-1	1	0	2	2	2	1	2	2	1	3	2	4	22
0	4	2	1	2	4	1	3	2	2	1	2	0	24
1	2	3	3	4	4	2	3	3	4	3	2	3	36
2	1	1	1	4	3	2	4	3	2	1	3	1	26

Galutinis panašumas: $36/(12 * 4) = 0.75$.

7. Taikydami laiko mastelio keitimo algoritmą raskite minimalų bendrą atstumą, kai atstumas tarp lyginamų kalbos kadrių yra

1	5	1	6	2	9	8	1
4	8	4	8	7	1	9	6
8	9	1	0	8	6	1	7
8	5	8	4	3	9	6	5
2	1	9	2	7	1	3	6
3	2	1	2	1	5	7	2

Laikykite, kad atstumas tarp pradinių kadrių yra kairiajame viršutiniame kampe.

Sprendimas

Taikydami DTW algoritmą pradedant nuo paskutinių kadrių randame optimalius kaupiamuosius atstumus

Home Page

Title Page



Page 12 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

19	18	14	21	15	22	29	27
22	18	13	17	20	13	21	26
27	19	10	9	17	17	12	20
27	24	21	13	9	14	11	13
21	19	24	15	13	6	5	8
23	20	18	17	15	14	9	2

Galutinis optimalus atstumas: 19.

8. Taikydami laiko mastelio keitimo algoritmą raskite atitiktis tarp kadry, jei atstumas tarp lyginamų kalbos kadry yra

1	5	1	6	2	9	8	1
4	8	4	8	7	1	9	6
8	9	1	0	8	6	1	7
8	5	8	4	3	9	6	5
2	1	9	2	7	1	3	6
3	2	1	2	1	5	7	2

Laikykite, kad atstumas tarp pradinių kadry poros yra kairiajame viršutiniame kampe.

Sprendimas

Taikydami DTW algoritmą pradedant nuo paskutinių kadry poros randame geriausius kaupiamuosius atstumus ir optimalią trajektoriją

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 14 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

19	18	14	21	15	22	29	27
22	18	13	17	20	13	21	26
27	19	10	9	17	17	12	20
27	24	21	13	9	14	11	13
21	19	24	15	13	6	5	8
23	20	18	17	15	14	9	2

Laikome, kad pradinio kadro indeksas yra 0. Tuomet optimali trajektorija duoda tokias kadru atitiktis (pirmasis indeksas stulpelio numeris):

$0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3, 5 \rightarrow 4, 6 \rightarrow 4, 7 \rightarrow 5$

.

Home Page

Title Page



Page 15 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

9. Duotosioms pilkumo lygmenų reikšmėms

$$u[0][0] = 16, u[0][1] = 64, u[1][0] = 32, u[1][1] = 256$$

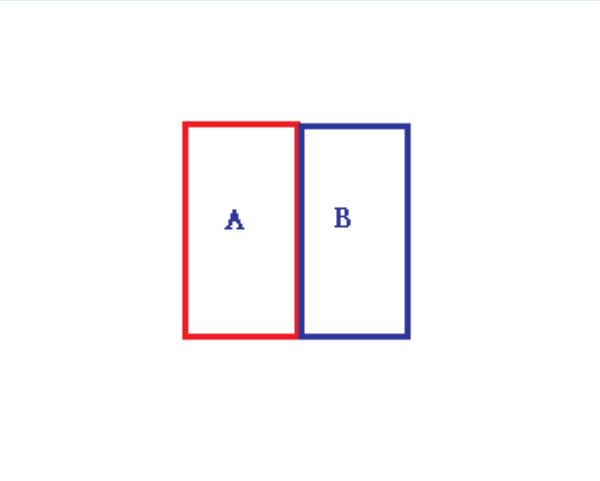
apskaičiuokite bitiesinę interpoliaciją taške

$$u(0.75, 0.25).$$

Sprendimas Pagal bitiesinės interpoliacijos formulę gauname

$$u(x, y) = u[0][0](1 - x)(1 - y) + u[0][1](1 - x)y + u[1][0]x(1 - y) + u[1][1]xy = 73$$

10. Raskite būdą kaip panaudojant kaupiamąjį pilkumo lygmenų vaizdą ir šešis aritmetinius veiksmus apskaičiuoti paveikslėlyje pavaizduotą Haro tipo požymį. Haro požymis lygus A stačiakampyje esančių pilkumo lygmenų sumai minus lygaus dydžio B stačiakampio pilkumo lygmenų suma.



Sprendimas Pažymėkime

$$I(x, y) = \sum_{i < x, j < y} u_{i,j}$$

kaupiamąjį vaizdą. Tuomet naudojant A ir B stačiakampių kraštus gausime tokią formulę Haro požymiui:

$$S_{AB} = S_A - S_B = (I(x_2, y_2) - I(x_2, y_1) - I(x_1, y_2) + I(x_1, y_1)) - (I(x_3, y_2) - I(x_3, y_1) - I(x_2, y_2) + I(x_2, y_1)).$$

Home Page

Title Page



Page 17 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Grupuoiant paskutinės formulės vienodus narius, gauname reikiamą išraišką:

$$S_{AB} = 2(I(x_2, y_2) - I(x_2, y_1)) - I(x_1, y_2) + I(x_1, y_1) - I(x_3, y_2) + I(x_3, y_1).$$

Gautoje Haro požymio apskaičiavimo formulėje yra 1-as daugybos, 3-ys atimties ir 2 sudėties veiksmi, viso - šeši aritmetiniai veiksmi.

Home Page

Title Page



Page 18 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

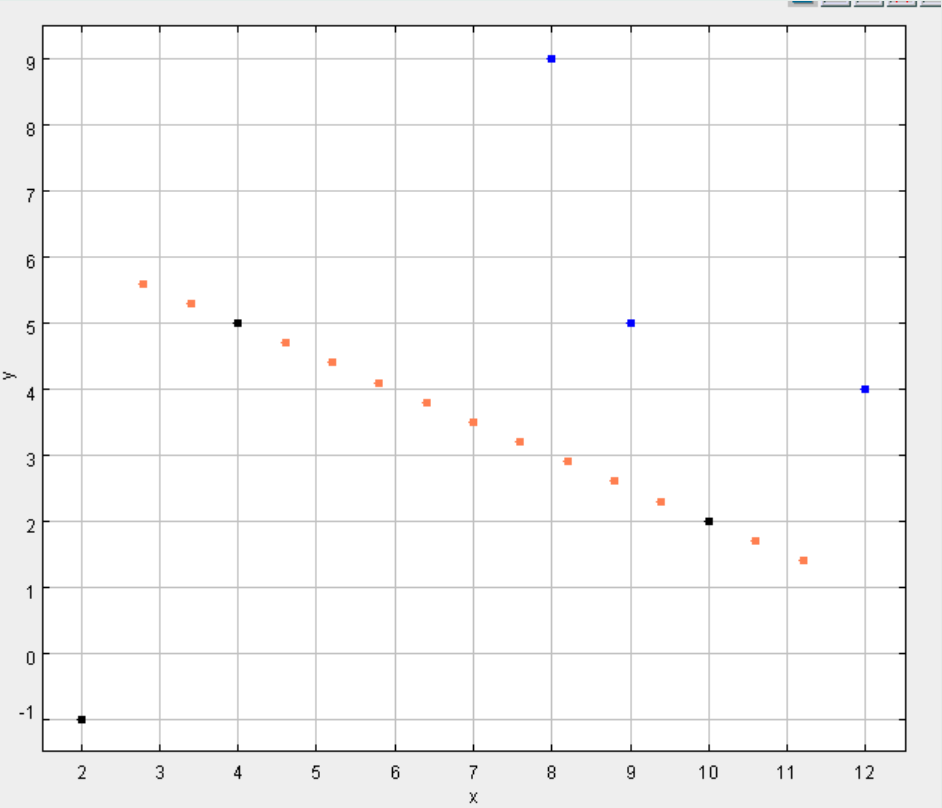
11. Raskite atraminių vektorių klasifikatorių, jei A klasės mokymo imtis yra plokštumos taškai

$$(2, -1), (4, 5), (10, 2),$$

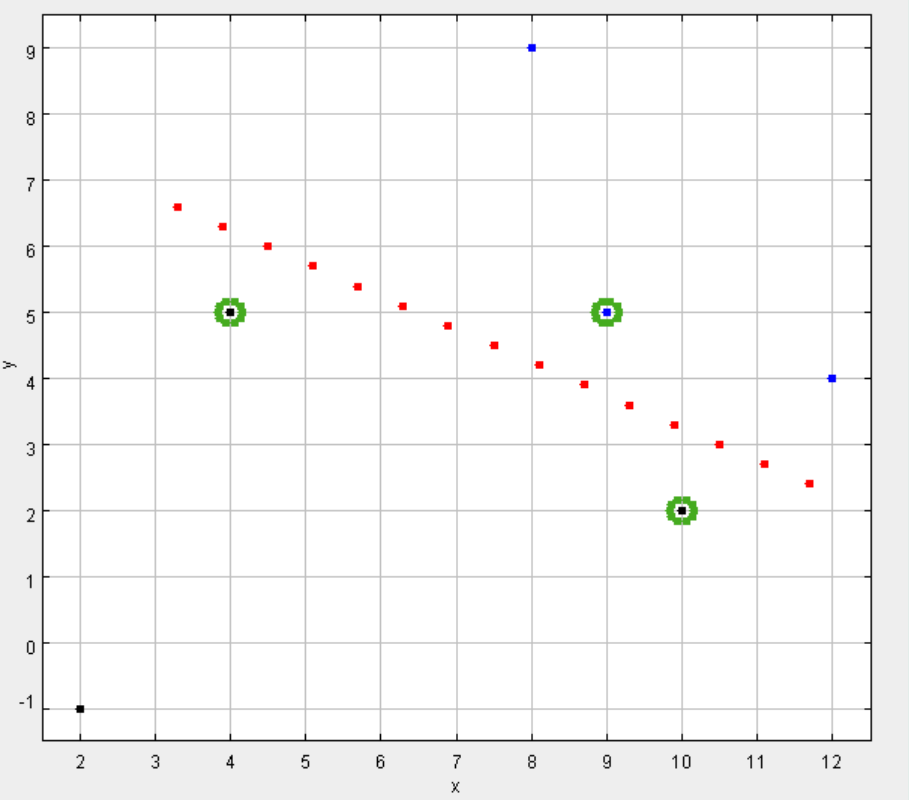
o B klasės:

$$(12, 4), (8, 9), (9, 5).$$

Sprendimas Pavaizduojame plokštumoje abiejų klasių taškus:



Maksimizuodami klasių taškų minimalų atstumą iki klasifikavimo tiesės surandame tris atraminius vektorius (jie žemiau pateiktoje iliustracijoje išskirti žalių taškų apskritimu) ir išvedame klasifikavimo tiesę nutolusią vienodu atstumu nuo trijų rastų atraminių taškų.



Tokiu būdu randame atraminių vektorių klasifikatoriaus tiesę

$$x = 8.5 + 2 * t, y = 4 - t, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

12. Turime A klasės keturis binarinių požymių pavyzdžius

$$A_1 = \{0, 1, 0\}, A_2 = \{0, 0, 0\}, A_3 = \{1, 1, 0\}, A_4 = \{0, 0, 1\},$$

ir B klasės analogiškų požymių pavyzdžius

$$B_1 = \{1, 1, 0\}, B_2 = \{1, 1, 1\}, B_3 = \{0, 1, 1\}, B_4 = \{1, 0, 1\}.$$

Raskite šioms mokymo duomenims naiviojo Bajeso klasifikatoriaus išraišką.

Sprendimas Apskaičiuojame požymių dažnių lenteles:

$$\#A \quad 0 : \quad \{3, 2, 3\}, \quad 1 : \quad \{1, 2, 1\},$$

$$\#B \quad 0 : \quad \{1, 1, 1\}, \quad 1 : \quad \{3, 3, 3\}.$$

Kadangi A ir B klasių mokymo imties dydžiai vienodi, laikome, kad klasių apriorinės tikimybės yra vienodos. Todėl naiviojo Bajeso klasifikatoriaus išraišką galima užrašyti taip:

$$\begin{aligned} NBK(\{x_1, x_2, x_3\}) &= P(\{x_1, x_2, x_3\} | A) - P(\{x_1, x_2, x_3\} | B) \\ &= \left(\frac{x_1}{4} + \frac{3(1-x_1)}{4}\right) \left(\frac{2x_2}{4} + \frac{2(1-x_2)}{4}\right) \left(\frac{x_3}{4} + \frac{3(1-x_3)}{4}\right) - \\ &\quad \left(\frac{3x_1}{4} + \frac{1-x_1}{4}\right) \left(\frac{3x_2}{4} + \frac{1-x_2}{4}\right) \left(\frac{3x_3}{4} + \frac{1-x_3}{4}\right). \end{aligned}$$

Home Page

Title Page



Page 22 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Jei kokiame nors taške $NBK(\{x_1, x_2, x_3\}) > 0$, priimame sprendimą, kad $\{x_1, x_2, x_3\}$ duomenys atitinka A klasę, priešingu atveju, kai $NBK(\{x_1, x_2, x_3\}) < 0$, laikome, kad $\{x_1, x_2, x_3\}$ yra B klasės. Ribiniu atveju, kai $NBK(\{x_1, x_2, x_3\}) = 0$, sprendimas nepriimamas arba pasirenkamas atsitiktinai su tikimybe 0.5.

13. Raskite duomenų

$$x_0 = 2, \ x_1 = 3, \ x_2 = -1, \ x_3 = -2, x_4 = -2,$$

antrosios eilės tiesinės prognozės koeficientus minimizuodami paklaidų kvadratų sumą

$$\epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2.$$

SprendimasAntrosios eilės tiesinės prognozės modelis užrašomas taip

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} + \epsilon_n, \quad n = 2, 3, 4.$$

Minimizuojant prognozės paklaidų kvadratų sumą, apskaičiuojame išvestines ir prilyginę jas nuliui, gauname tokią tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^4 (ax_{n-1} + bx_{n-2} - x_n)x_{n-1} &= 0, \\ \sum_{n=2}^4 (ax_{n-1} + bx_{n-2} - x_n)x_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Apskaičiavę lygčių sistemos koeficientus ir išprende

$$14a + 5b = 3,$$

$$5a + 14b = -6,$$

Home Page

Title Page



Page 24 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

lygčių sistema, gauname $a = \frac{14*3-5(-6)}{14*14-5*5} = \frac{8}{19}$ ir $a = \frac{14*(-6)-5*3}{14*14-5*5} = \frac{-11}{19}$. Todėl šių duomenų antrosios eilės tiesinis prognozės modelis atrodo taip:

$$x_n = 0.42x_{n-1} - 0.58x_{n-2} + \epsilon_n.$$

14. Apskaičiuokite duotiesiems panašumams DET ir eiliškumo kreivių taškus

id		Jonas	Jonas	Petras	Petras	Ona	Ona
	nr	1	2	3	4	5	6
Jonas	1		85	50	75	45	40
Jonas	2			65	80	40	50
Petras	3				70	50	50
Petras	4					40	45
Ona	5						60
Ona	6						

Sprendimas Žiūrėkite DET/ROC kreivei skirtos paskaitos konspektus